ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ ԱՐՏԱԿ ՌԱՖԻԿԻ

ԱՊԱՀՈՎԱԳՐԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ա.01.05 – "Հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն"

մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАРТИРОСЯН АРТАК РАФИКОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТРАХОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ СИТУАЦИЯХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико – математических наук по специальности

01.01.05 – «Теория вероятностей и математическая статистика»

ЕРЕВАН 2008

Ատենախոսության թեման հաստատվել է
Երևանի Պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ. - մ. գ. դ. պրոֆ. Է. Ա. Դանիելյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ. - մ. գ. դ. պրոֆ. Վ. Կ. Օհանյան,
ֆ.- մ. գ. թ. դոցենտ՝ Գ. Վ. Միքաելյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Մոսկվայի էլեկտրոնիկայի և մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Ատենախոսության պաշտպանությունը տեղի կունենա 2008 թ. հունիսի 3 - ին ժ. 15^{00} - ին ԵՊՀ – ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցեն՝ 375049, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ – ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2008 թ. ապրիլի 23 – ին:

050 մասնագիտության խորհրդի գիտական քարտուղար
ֆ.- մ. գ. թ., դոցենտ.՝ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в
Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель: д. ф. - м. н., проф. Э. А. Даниелян

Официальные оппоненты: д. ф. - м. н., проф. В. К. Оганян,
к. ф. - м. н., доцент Г. В. Микаелян

Ведущая организация: Московский институт электроники и математики

Защита диссертации состоится 3 июня в 15^{00} на заседании специализированного совета 050 при ЕГУ.
Адрес: 375049, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.
С диссертацией можно ознакомится в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 23 апреля 2008 г.

Ученый секретарь специализированного совета 050,
к. ф. - м. н., доцент Арутюнян Т. Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В долгосрочном коллективном страховании не учитывают фактор банковского процента, а риск оценивают с помощью математических моделей. В них число $N(t)$ страховых случаев за $(0,t]$ имеет распределение:

$$\mathrm{P}\{N(t)=k\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ k=0,1,2,\dots,\ \lambda>0.$$

При наступлении страховых случаев “выплачиваются” страховые суммы $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечным средним $a\in R^1$ и с функцией распределения (ФР) F. Суммы не зависят от моментов наступления страховых случаев. Если компания располагает начальным капиталом x, то ее резерв в момент t есть $x+ct-S(t)$, где $S(t)=\sum_{0\le t_i\le t}X_i$ — общая страховая сумма за $(0,t]$, а c — скорость увеличения ($c>0$) или уменьшения ($c<0$) резервов. Компания попадает в ситуацию “разорения” при выполнении события $\{S(t)>x+ct\}$. Интересующие нас модели относятся к следующим портфелям[1]:

Портфель 1 с произвольными договорами;

Портфель 2 с чисто страховыми договорами;

Портфель 3 с договорами, связанными с рентой.

Страховые риски изучались при фиксированной загрузке[2].

Со временем загрузка, следовательно, и риск могут достигнуть критических значений. Тогда оценки при фиксированном ρ_1 непригодны. Возникает задача изучения рисков, когда $\rho_1\to c$ (критическая ситуация)[3]. Оценки риска сводятся к анализу процессов риска $r=\sup_{0\le u<\infty}\zeta(u)$ и $r(t)=\sup_{0\le u\le t}\zeta(u)$ с ФР $W(x)=P\{r\le x\}$ и $W(t,x)=P\{r(t)\le x\}$, где $\zeta(t)=S(t)-ct$[4] в Портфеле 1 и $\zeta(u)=(-1)^k(u-S(u))$ в Портфеле k, $k=2,3$.

При критической загрузке $W(t,x)$ и $W(x)$ стремятся к нулю. Для возникновения невырожденных предельных законов надо задать порядок

---

[1] Под “страховым портфелем” понимаем совокупность однородных и однотипных страховых договоров.

[2] Загрузкой называют среднюю ожидаемую величину суммарных выплат $\rho_1=\lambda a$ в единицу времени ($\rho_1>0$ или $\rho_1<0$).

[3] Под $\rho\to 0$ понимаем либо $\rho_1\downarrow c$, либо $\rho_1\uparrow c$, где $\rho=|c-\rho_1|$.

[4] Без ограничения общности $c\rho_1>0$. В Портфелях $k=2;3$ полагаем $c=(-1)^k$ (выбором денежной единицы).

коэффициента нормирования $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho_1\to c]{}0$ и способ совместного стремления $\rho_1\to c$, $t\to+\infty$.

Оценка W важна при больших рисках: $1-F(x)\sim C(2-\gamma)\gamma^{-1}x^{-\gamma}$, $x\to+\infty$, $\gamma\in(1,2)$, $C\in R^+$ ($f(x)\sim g(x)$, $x\to+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))=1$).

Предположим, что характеристическая функция (ХФ) $\hat\psi(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{isx}dF(x)$, $s\in R^1=(-\infty,+\infty)$ в окрестности нуля имеет следующее представление

$$\hat\psi(s)-1-ais\sim A\begin{cases}-C_\gamma|s|^\gamma L(1/|s|), & 1<\gamma<2,\\ s^2, & \gamma=2\end{cases}{}^{5},\ s\to0,\ A>0^{6}, \qquad (1)$$

где $a=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)$ конечно, $C_\gamma=\exp\left\{\pm\frac{\pi i(\gamma-2)}{2}\right\}$, $\pm=sign(s)$, а функция $L(x)>0$ является медленно меняющейся функцией (ММФ) на бесконечности.

Условие (1) при $1<\gamma<2$ эквивалентно условию $1-F(x)\sim\frac{A(\gamma-1)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{-\gamma}L(x)$, $x\to+\infty$, которое обобщает условие большого риска.

Диссертационная работа посвящена анализу предельных рисков при критической загрузке и условии (1) в Портфелях 1 — 3.

Обьект исследования - страховые риски при критической ситуации в Портфелях 1 — 3. В частности, исследование свойств вспомогательных предельных законов с преобразованием Лапласа — Стильтеса (ПЛС) $(\Diamond(s))^{-1}$, $e^{-t\Diamond(s)}$, где $\Diamond=\Delta$ или $\Diamond=\nabla$, $\Delta(s)\ge0$, $\Delta(0)=0$ и $\nabla(s)\ge1$, $\nabla(0)=1$ —

---

[5] В Портфелях 2 и 3 F сосредоточена на R^+ и (1) эквивалентно условию

$$\psi(s)-1+as\sim As^\gamma\begin{cases}L(1/s), & 1<\gamma<2,\\ 1, & \gamma=2\end{cases},\ s\downarrow0,\ A>0, \qquad (2)$$

где $\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)$, $\mathrm{Re}(s)\ge0$, $a=M(X_i)=\int_0^\infty xdF(x)<\infty$.

[6] При $1<\gamma<2$ конечны моменты $\int_0^\infty x^\alpha dF(x)<+\infty$ порядка $\alpha<\gamma$, а при $\gamma=2$ $A=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2dF(x)<+\infty$.

решения уравнений $x^\gamma + x = s$ и $x^\gamma - x = s$, $1 < \gamma \le 2$, $s \ge 0$, соответственно[7]. С помощью их плотностей выражены основные критические риски.

Цель работы: 1. В Портфелях 1 – 3: Изучить асимптотику страховых рисков в докритических ($\rho_1 \uparrow 1$) и надкритических ($\rho_1 \downarrow 1$) ситуациях;
2. Получить явный вид предельных рисков.

Методы анализа. Использованы методы теории очередей, теории комплексного анализа, правильно меняющихся функций, интегральных пребразований, теоремы слабой сходимости.

Научная новизна. 1. Обобщено условие большого риска в страховании.
2. Найдены возможные предельные законы для нормированных рисков в терминах интегральных преобразований.
3. Получены представления предельных законов в явном виде.
Все результаты диссертации новы и сопровождены математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при чтении спец. курса по теории риска и теории очередей на математических факультетах и при оценке финансовых рисков страховых компаний.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедр теории вероятностей и математической статистики, теории функций ЕГУ (2007-2008), Международного Центра по передаче информации в Тампере, Финляндия (2006-2008).

Публикации. По теме диссертации опубликованы шесть научных статей. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и обьем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 52 наименований, содержит 81 страниц текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во Введении: обоснована актуальность работы и даны общие постановки задач.

Глава 1 состоит из 6 параграфов и посвящена законам с ПЛС $\left(\Diamond(s)\right)^{-1}$ и $e^{-t\Diamond(s)}$. В §1.1 исследованы свойства функции ∇ в комплексной плоскости. В §1.2 для плотности $f_\nabla(x,\tau)$ с преобразованием Лапласа (ПЛ) $e^{-t\nabla(s)}$ найдено интегральное представление, с помощью которого в §1.3 получено представление в виде сходящегося ряда. В §1.4 аналогичные представления выведены для плотности $f_\Diamond^o(x)$ с ПЛ $\left(\Diamond(s)\right)^{-1}$. В §1.5-1.6 дана связь с одним классом функций М. М. Джрбашяна и Р. А. Багияна и с

[7]Функция $\Diamond(s)$ возникает при описании предельных законов в Портфелях 1 – 3 при критической загрузке.

устойчивыми законами, приведены асимптотические разложения для $f_\nabla(x,\tau)$ при $x \to 0$ и $x \to +\infty$.

Главы 2-4 состоят из 4 параграфов каждая и посвящены анализу страховых рисков в Портфелях 1 – 3 при критической загрузке и условии (1). Критические риски найдены в терминах ПЛС, которые содержат $\Diamond(s)$. Далее, произведено обращение и найдены явные выражения с помощью плотностей $f_\Diamond(x,\tau)$, $f_\Diamond^o(x)$ и устойчивых.

Первые параграфы Глав 2-4 содержат предварительные сведения, уточнения постановок задач.

В §2.2 установлено существование асимптотически обратной правильно меняющейся функции (ПМФ) при условии (1).

В §2.3 приведены ПЛС критических рисков в Портфеле 1, а §2.4 выделен для доказательства основных результатов главы.

Результаты §2.2 использованы в §3.2 для доказательства правильного изменения коэффициентов нормирования рисков в предельных теоремах. ПЛС предельных рисков выведены в §3.3. Обращения предельных законов найдены в §3.4.

В §4.2 установлены новые представления вероятности неразорения, а в §4.3 доказаны предельные теоремы для рисков в Портфеле 3. В §4.4 перечислены свойства случайных величин с ПЛС $e^{-t\Diamond(s)}$.

В ПРИЛОЖЕНИИ предельные теоремы сформулированы в терминах СВ T_x, которая является первым моментом ситуации разорения. Показано, что критические риски Портфеля 1 не совпадают с критическими рисками Портфелей 2-3.

Вначале сформулируем результаты[8], полученные для плотностей с ПЛ $e^{-t\Diamond(s)}$ и $\left(\Diamond(s)\right)^{-1}$.

Теорема 1. Законы с ПЛС $\left(\Diamond(s)\right)^{-1}$, $e^{-t\Diamond(s)}$ абсолютно непрерывны, их плотности имеют представления в виде сходящихся рядов

$$f_o^\Diamond(x) = \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1} x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} + \frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-(\pm 1)\right)^{n+1}}{(n+1)!} x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right),$$

$$f_\Diamond(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\gamma\pi x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (t \pm x)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right) x^{-\frac{n+1}{\gamma}} \sin\frac{n+1}{\gamma}\pi, & 1 < \gamma \le 2, \\ \dfrac{t}{2x\sqrt{\pi x}} exp\left\{-(t \pm x)^2 / 4x\right\}, & \gamma = 2 \end{cases}$$ [9].

[8]Нумерация и формулировки результатов здесь и в диссертации отличаются.
[9] $f_\Delta(x,t)$ ранее найдена Р. Н. Читчяном и Угарид Мухамедом.

В “ ± ” верхний (нижний) знак выбирается при ∇ (Δ).

Плотность $f_\Diamond(x,t)$ связывается с одним известным классом функций[10]

$$\Psi_{\beta,\mu}(x)=\int_0^x \Phi_{\beta,\mu}(t)\,dt\ ,\quad x\in[0,\infty)\ ,$$

где

$$\Phi_{\beta,\mu}(s)=\frac{\beta}{2\pi i}\int_{\Gamma(\varepsilon,\beta)} e^{z^\beta - sz} z^{\beta(1-\mu)}dz\ ,\ 1/\beta\le\mu<+\infty\ .$$

Здесь для $\varepsilon>0$ и $\beta\in(0,\pi)$) контур $\Gamma(\varepsilon,\beta)$ плоскости z пробегаем в направлении неубывания $\arg z$. Он состоит из двух лучей $L^{(\pm)}(\varepsilon,\beta)=\{z:\arg(z)=\pm\beta,\varepsilon\le|z|<\infty\}$ и дуги окружности $l(\varepsilon,\beta)=\{z:|\arg(z)|\le\beta,|z|=\varepsilon\}$, соединяющей концы $\varepsilon e^{\pm i\beta}$ этих лучей. $\Phi_{\beta,\mu}(s)$ — целая функция и

$$\Phi_{\beta,\mu}(s)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma\left(1-\mu+(k+1)\beta^{-1}\right)}{\Gamma(1+k)}\sin\pi\left(\frac{k+1}{\beta}-\mu\right)s^k\ .$$

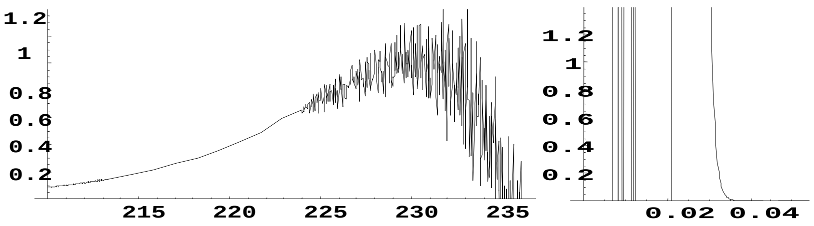
Нами доказана следующая

Лемма 1. Имеют место соотношения связи

$$f_\Diamond(x,\tau)=\frac{\tau}{\gamma x^{1-(1/\gamma)}}\Phi_{\gamma,1}\left((\tau\pm x)x^{-1/\gamma}\right)=\tau\left(\tau\pm x^{1-(2/\gamma)}\right)^{-1}x^{-1}\Phi_{\gamma,1/\gamma}\left((\tau\pm x)x^{-1/\gamma}\right).$$

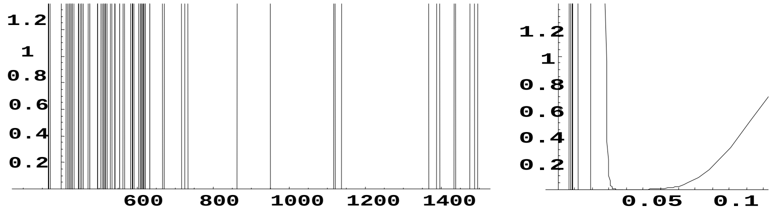
Далее, установлена связь $f_\Diamond$ с устойчивыми плотностями $p(x,\alpha,\varphi)$ с ХФ $\exp\left\{-|t|^\alpha\exp\{\pm\pi i\varphi/2\}\right\}$, где $0<\alpha\le 2$, $\pm=sign(t)$.

Мы с помощью компьютерной программы Mathematica 5.2 построили графики плотностей $f_\Diamond(x,1)$ (без ограничения общности положено $\tau=1$) при $\gamma=1{,}5;1{,}6;1{,}7;1{,}8;2$, взяв в формуле Теоремы 1 2500 членов разложения.



$f_\nabla(x,1)$

[10]М. М. Джрбашян, Р. А. Багян, Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг — Леффлера. — Изв. АН Арм. ССР, Математика, X, № 6, 1975, 482 — 508.



$f_\Delta(x,1)$

Графики с наличием осцилляции подтверждают необходимость отдельного рассмотрения асимптотического поведения плотностей на бесконечности и вблизи нуля.

Приведем, например, асимптотическое разложение плотности $f_\Diamond$ в окрестности нуля[11].

Пусть $a_n=a_n(\alpha)=\dfrac{2^{2n}|B_{2n}|}{2n(2n)!}\left[\alpha(1-\alpha)^{2n-1}+1-(1-\alpha)^{2n}\right]$ — полиномы степени $2n-1$ с нулевым свободным членом (B_n — числа Бернулли). Обозначим $b_n(\alpha)=\dfrac{1}{n!}C_n(1!a_1,2!a_2,...,n!a_n)$, где

$$C_n(y_1,y_2,...,y_n)=\sum\left\{\frac{n!}{k_1!...k_n!}\left(\frac{y_1}{1!}\right)^{k_1}...\left(\frac{y_n}{n!}\right)^{k_n}:k_1+2k_2+...+nk_n=n,k_j\ge 0\right\}\ -$$

полиномы Белла. Положим $d_n=d_n(\vartheta,\alpha)=\left(a_n(\alpha)-\dfrac{\vartheta^2}{\alpha}b_{n+1}(\alpha)\right)\vartheta^{2n}$, $q_n=q_n(\vartheta,\alpha)=\dfrac{1}{n!}C_n(1!d_1,2!d_2,...,n!d_n)$ (полиномы степени $2(n+1)$ по ϑ и полиномы степени $2n$ по α). Пусть $\xi=\xi(x,\alpha)=(1-\alpha)\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ и $v=v(\alpha)=(1-\alpha)^{-1/\alpha}$, $Q_n=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}q_n(t)e^{-t^2/2}dt$.

Теорема 2. Для $f_\Diamond(t,x)$ имеют место асимптотические разложения:

1. $$f_\nabla(x,t)\sim\frac{t v e^{-\xi}}{(t+x)^{\gamma+1}}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\xi^{\frac{(2\gamma-1)}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)^{-n}\right)\ \text{при}\ \frac{x^{1/\gamma}}{t+x}\to 0\ ,$$

где $\xi=\xi\left(\dfrac{x}{(t+x)^\gamma},\gamma^{-1}\right)=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\left(\dfrac{\gamma x}{(t+x)^\gamma}\right)^{1/(1-\gamma)}$, $v=v\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)=\left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)^\gamma$;

[11]Аналогичные разложения имеются для устойчивых законов (В. В. Золотарев), с помощью которых и установлена Теорема 2.

2. $f_\Delta(x,t) \sim \frac{t\nu\,\mathrm{e}^{-\xi}}{(t-x)^{\gamma+1}}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\,\xi^{\frac{(2\gamma-1)}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)^{-n}\right)$ при $\frac{x^{1/\gamma}}{t-x}\downarrow 0$,

где $\xi=\xi\left(\frac{x}{(t-x)^{\gamma}},\gamma^{-1}\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{\gamma x}{(t-x)^{\gamma}}\right)^{1/(1-\gamma)}$, $\nu=\nu\left(\gamma^{-1}\right)=\left(\gamma/(\gamma-1)\right)^{\gamma}$;

3. $f_\Delta(x,t) \sim \frac{\gamma t}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma k)x^{k-1}}{(k-1)!(x-t)^{\gamma k+1}}\sin\left(\pi k(2-\gamma)\right)$ при $\frac{x^{1/\gamma}}{t-x}\uparrow 0$ и $1<\gamma<2$;

4. $f_\Delta(x,t) \sim \frac{t}{\sqrt{\pi x}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)^2}{4x}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(x-t)^2}{8x}\right)^{-n}\right)$ при $\frac{x^{1/\gamma}}{t-x}\uparrow 0$ и $\gamma=2$.

Рассмотрим уравнение $(\nu(s)=)s-\lambda(1-\psi(s))=0$, $s\ge 0$.

Известно (Л. Такач), что наибольший корень $s=\omega\ge 0$ этого уравнения при $\rho_1<1$ равен нулю.

Лемма 2. $\omega>0$ при $\rho_1\downarrow 1$ имеет порядок $\omega\sim(\rho/\mathrm{B})^{1/\gamma-1}L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho)$, $B=\lambda A$, где $L_2^{(\alpha)}(t)=\left(t^{-\alpha}/M^{(\alpha)}(t)\right)$, $M^{(\alpha)}(t)$ — асимптотически обратная к $\left(t^{\alpha}/L(t)\right)$ функция.

Лемма 2 и следующее утверждение лежат в основе доказываемых предельных теорем.

Пусть $\alpha(\rho),\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$. Обозначим

$$\beta(\rho)=\begin{cases}\omega, & \alpha(\rho)=o(\rho\omega),\text{ или }\alpha(\rho)\sim\rho\omega\\ (\alpha(\rho)/\mathrm{B})^{1/\gamma}L_2^{(\gamma)}(\mathrm{B}/\alpha(\rho)), & \rho\omega=o(\alpha(\rho))\end{cases}$$

и

$$\alpha_1(\rho)=\begin{cases}\rho\theta(\rho), & \theta(\rho)=o(\omega),\text{ или }\theta(\rho)\sim\omega,\\ B\theta(\rho)^{\gamma}L(1/\theta(\rho)), & \omega=o(\theta(\rho))\end{cases}.$$

Лемма 3. Функция $\nu(s)$ и единственный в области $\mathrm{Re}\,z\ge 0$ корень $s=\omega(z)$ уравнения $\nu(s)=z$ имеют при $\rho\to 0$ асимптотические представления

$$\nu(\theta(\rho)s)\sim\alpha_1(\rho)b(s),\ \omega(\alpha(\rho)s)\sim\beta(\rho)A(s),$$

где:

$$b(s)=\begin{cases}sign(1-\rho_1)s, & \theta(\rho)=o(\omega),\\ s^{\gamma}+sign(1-\rho_1)s, & \theta(\rho)\sim\omega,\\ s^{\gamma}, & \omega=o(\theta(\rho))\end{cases};$$

$$A(s)=A(s,\theta(\rho))=\begin{cases}1, & \theta(\rho)=o(\omega), & \rho_1\downarrow 1,\\ s, & \theta(\rho)=o(\omega), & \rho_1\uparrow 1,\\ \nabla(s), & \theta(\rho)\sim\omega, & \rho_1\downarrow 1,\\ \Delta(s), & \theta(\rho)\sim\omega, & \rho_1\uparrow 1,\\ s^{1/\gamma}, & \omega=o(\theta(\rho)), & \rho_1\to 1\end{cases}.$$

Во всех портфелях при согласованном стремлении $t\to+\infty$ и $\rho\to 0$ коэффициенты нормирования $\theta(\rho)\to 0$ и порядки $\alpha_1(\rho)$ роста времени t сравниваются с величиной порядка ω.

В работе найдено $\theta(\rho)$ такое, что существует собственная ФР

$$\lim W\left(t;\left(x/\theta(\rho)\right)\right)=W_\tau(x),\ x\ge 0,$$

когда $t\alpha_1(\rho)\to\tau$, $0\le\tau\le+\infty$, причем невырожденные случаи возникают лишь в случаях $0<\tau\le+\infty$ и $\theta(\rho)\ne o(\omega)$.

Пусть $E_y(x)$ — ФР с единичным скачком в точке y,

$$\Phi_\tau(x)=\tau^{-1/\gamma}\int_{-\infty}^{x}p\left(u\tau^{-1/\gamma},\gamma,\gamma-2\right)du,\ x\in R^1,\ \tau\in R^+$$

и

$$\delta(\tau)=\begin{cases}\tau sign(c-\rho_1), & \theta(\rho)\sim\omega\text{ или }\theta(\rho)=o(\omega),\rho\to 0,\\ 0, & \omega=o(\theta(\rho)),\rho\to 0\end{cases}.$$

Сформулируем результаты диссертации в Портфелях 1 — 3.

Портфель 1.

Теорема 3. Пусть $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$ и $t\to+\infty$ так, что $t\alpha_1(\rho)\to\tau$, $\tau\in[0,+\infty]$. Существует предел

$$\lim P\left\{\theta(\rho)\zeta(t)\le x\right\}=\Phi(\tau,x),\ x\in R^1,$$

где $\Phi(\tau,x)=\begin{cases}E_{-\delta(\tau)}(x), & \theta(\rho)=o(\omega),\\ \Phi(\tau,x)=\Phi_\tau\left(x-\delta(\tau)\right), & \theta(\rho)\sim\omega,\text{ или }\omega=o(\theta(\rho))\end{cases}$

при $0<\tau<+\infty$, а $\Phi(0,x)=E_o(x)$, $\Phi(+\infty,x)\equiv 0$.

Обозначим $\beta(s)=s^{1/\gamma}$ при $\delta(\tau)=0$; $\beta(s)=\lozenge(s)$ при $\delta(\tau)\ne 0$.

Теорема 4. При $0<\nu<\infty$, $s\ge 0$, $0<\tau<+\infty$, $\mu=0{,}1$ функция

$$N(s,\nu,\mu,\tau)\overset{def}{=}\exp\left\{-\int_0^{\infty}\left(e^{-sx}-1\right)d_x\left[\int_0^{\infty}e^{-\nu u\mu}\left(1-\Phi(\tau u,x)\right)u^{-1}du\right]\right\}$$

имеет представление

$$N(s,\nu,\mu,\tau)=\beta(\mu\nu/\tau)/\left(s+\beta(\mu\nu/\tau)\right)$$

и является двойным ПЛС для ФР $U(x,t)=1-\int_0^t \phi(\tau u,x)du$, где

$$\phi(x,\tau)=\begin{cases} x^{-\gamma}p\left(\tau x^{-\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1}\right), & \delta(\tau)=0\\ f_\Diamond(\tau,x), & \delta(\tau)\neq 0\end{cases}.$$

В Портфеле 1 существование невырожденных пределов

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ \rho\to 0}} W\left(ut, x/\theta(\rho)\right) = W_\tau^\pm(u,x),\ \lim_{\rho_1\uparrow c} W\left(x/\theta(\rho)\right)=W_\tau^\pm(x),\ \pm=sign(c) \qquad (3)$$

при критической загрузке для процессов риска связано с существованием $\Phi(\tau,x)$. Пусть

$$\hat C(v)=\int_0^\infty d_x\left[\int_0^\infty e^{-vu}P\{\zeta(u)>x\}u^{-1}du\right],\ \hat C=\hat C(0)$$

и

$$C^o(v)=\lim_{\rho\to0}\hat C(v),\ C^o=\lim_{\rho\to 0}\hat C.$$

Теорема 5. В условиях Теоремы 3 при $0<\tau<\infty$ существуют пределы (3), где

$$v\int_0^\infty e^{-vu}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}d_xW_\tau^+(u,x)\right\}du = e^{-C^o}N(s,v,1,\tau),\ 0<v<\infty,\ s\ge0. \qquad (4)$$

$W_\tau^+(x)$ определяется из (4) и не зависит от u, причем с $v=0$ и $\tau=1$ справа;

$$W_\tau^-(u,x)=\begin{cases} W_\tau^+(u,x), & \theta(\rho)=o(-\lambda/c),\\ \left(1-e^{-x}\right)*W_\tau^+(u,x), & \theta(\rho)\sim-\lambda/c,\\ 0, & -\lambda/c=o\left(\theta(\rho)\right),\end{cases}; \qquad (5)$$

$W_\tau^-(x)$ определяется из (5) с заменой $W_\tau^\pm(u,x)$ на $W_\tau^\pm(x)$.

Замечание 1. Пусть $t=\tau$ фиксировано и $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to0]{}0$. Тогда:

a) $\Phi(t,x)$, $W_\tau^\pm(x)$, $W_\tau^\pm(u,x)$ существуют лишь в случае

$$\theta(\rho)\sim B^{-\frac{1}{\gamma}}L_2^{(\gamma)}(B) \text{ при } \omega=o\left(\theta(\rho)\right),$$

причем при $c\le 0$ в правой части (4) добавляется множитель $\varepsilon^\pm(v,s)$, где

$$\varepsilon^+(v,s)=1,\ \varepsilon^-(v,s)=(\lambda_o+v)(\lambda_o+v+ps)^{-1},$$

$$p=\lim\left(-c\theta(\rho)\right)\in[0,\infty],\ \lambda_o=\lim\lambda\in[0,\infty].$$

b) $W_\tau^\pm(u,x)$ определяется из равенства

$$v\int_0^\infty e^{-vu}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}d_xW_\tau^\pm(u,x)\right\}du = e^{-C^o(v)}\varepsilon^\pm(v,s)N(s,v,1,1).$$

При $s\ge0$ обозначим: $v^+(s)\equiv1$;

$$v^-(s)=\begin{cases}1, & \theta(\rho)=o(-\lambda/c),\\ (1+s)^{-1}, & \theta(\rho)\sim(-\lambda/c),\\ 0, & -\lambda/c=o\left(\theta(\rho)\right)\end{cases}.$$

Пусть $\pm=sign\left(\delta(\bullet)\right)$ в $\Diamond(s)$ и

$$\chi_\tau^\pm(s,v)=v\int_0^\infty e^{-vu}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}d_xW_\tau^\pm(u,x)\right\}du.$$

Следствие 1. В условиях Теоремы 5:

$$\chi_\tau^\pm(s,v)=e^{-C^o}v^\pm(s)\begin{cases}1, & \rho_1<c\\ v/(v+\tau s), & \rho_1>c\end{cases},\ \theta(\rho)=o(\omega);$$

$$\chi_\tau^\pm(s,v)=e^{-C^o}v^\pm(s)\Diamond(v/\tau)\left(s+\Diamond(v/\tau)\right)^{-1},\ \theta(\rho)\sim\omega;$$

$$\chi_\tau^\pm(s,v)=e^{-C^o}v^\pm(s)\sqrt{v}\left(\sqrt{v}+s\sqrt{\tau}\right)^{-1},\ \omega=o\left(\theta(\rho)\right).$$

Портфель 2[12]. Пусть $G_\alpha(x)$, $\alpha\in(0,1)$ - стандартный устойчивый закон с ПЛС $\exp\{-s^\alpha\}$, $s\ge0$.

Теорема 6. При условии (2) невырожденная, собственная ФР

$$W_o(x)=\lim_{\rho_1\uparrow1}P\{\theta(\rho)r\le x\}$$

существует т. и т. т., к.[13] $\theta(\rho)\sim\omega$, причем

$$W_o(x)=\left\{\begin{matrix}1-e^{-x}, & \gamma=2,\\ \int_0^\infty e^{-t}G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)dt, & 1<\gamma<2\end{matrix}\right\}=1-\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma\left(1+k(\gamma-1)\right)}.$$

Теорема 7. Пусть выполнено условие (1). Тогда:

1) Если $0<\tau<\infty$, то при любом $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to0]{}0$ существует собственный невырожденный предел $W_\tau(x)$ с ПЛС

[12]Риски в Портфеле 2 представляют собой виртуальное и стационарное времена ожидания в модели $M|G|1|\infty$ FIFO очередей. Для них ранее (О. В. Висков, Р. Н. Читчян, Угарид Мухамед) в условиях критической загрузки $\rho_1\to1$ при более частном предположении $\psi(s)-1+as=As^\gamma\left(1+o(1)\right)$, $s\downarrow0$, $A>0$, $1<\gamma\le2$, чем (2), в необращенном виде установлены аналоги предельных теорем 6 — 7.

[13]т. и т. т., к. — тогда и только тогда, когда.

$$\chi_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dW_\tau(x)=\begin{cases} e^{-\tau s}, & \theta(\rho)=o(\omega) \text{ при } \rho_1\downarrow 1,\\ e^{\tau b(s)}\left[1-s\int_0^\tau e^{-b(s)v}dF_o(v)\right], & \text{в остальных случаях}\end{cases},$$

где $\int_0^\infty e^{-sx}dF_0(x)=\frac{1}{A(s)}$. Здесь $A(s)=A(s,\alpha_1(\rho))$.

2) Если $\tau=\infty$, то невырожденная собственная предельная ФР

$$\lim_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=W_\infty(x)$$

существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\omega$ при $\rho_1\uparrow 1$, причем $W_\infty(x)=W_o(x)$.

Пусть V — мера на $[0,+\infty)$. Ее в случаях справа в $\delta(\tau)$ обозначаем V_+, V_-, V_0 ($\pm=sign(1-\rho_1)$). Она связана с устойчивой ФР G_α. Именно,

$$V_\pm(x)=\int_0^\infty e^{\mp t}G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)dt=1+\sum_{k=0}^\infty\frac{\left(-(\pm1)\right)^{k+1}x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))},\ 1<\gamma<2,$$

$$V_0(x)=\int_0^\infty G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)dt=\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},\ 1<\gamma<2$$

и при $\gamma=2$

$$V_+(x)=1-e^{-x},\ V_-(x)=e^x,\ V_0(x)=x.$$

Далее, запишем плотности

$$f(x,t)=\frac{t}{\gamma\pi x}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\left(t-\delta(x)\right)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi,$$

$$f_0(x)=\int_0^\infty f(x,t)dt \text{ и } \varphi(x,\tau)=\tau^{-1/\gamma}p_\gamma\left(\tau^{-1/\gamma}\left(x+\delta(\tau)\right)\right),$$

где $p_\gamma(x)$, $x\in R$, $1<\gamma\le 2$ — плотность устойчивого закона с ХФ $e^{(-it)^\gamma}$.

Теорема 8. В условиях Теоремы 7, когда $0<\tau<\infty$, $\theta(\rho)\sim\omega$ и $\omega=o(\theta(\rho))$, при $\rho_1\to 1$

$$W_\tau(x)=\int_{-\infty}^x\varphi(v,\tau)dv-V(x)*\int_{-\infty}^x\left(\int_0^\tau f_o(\tau-u)d_u\varphi(v,u)\right)dv,\ x\ge 0.$$

Теорема 9. При условии (1), если $B\to\infty$, $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$ и t фиксировано, то предел

$$\lim_{\rho\to 0}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=W_2(t,x)$$

существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim B^{-1/\gamma}L_2^{(\gamma)}(B)$. При этом,

$$W_2(t,x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \int_{-\infty}^x h(t,x)dx, & x>0\end{cases},$$

где

$$h(t,x)=\begin{cases}\left(1/2\sqrt{\pi t}\right)\exp\left\{-x^2/4t\right\}, & \gamma=2,\\ \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma\left(k\gamma^{-1}+1\right)}{k!}(-x)^{k-1}t^{-k/\gamma}\sin\frac{\pi k(\gamma-1)}{\gamma}, & 1<\gamma<2\end{cases}.$$

Портфель 3.

Лемма 4. Пусть $\{S(u):0\le u\le\infty\}$ — сепарабельный СП с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого — неубывающие ступенчатые функции, обращающиеся в нуль при $u=0$. Существует мера $U_y(x)=U(x,y)$, такая что

$$W(t,x)=\begin{cases}1-\int_x^t d_yU(x,y), & 0<x\le t,\\ 1, & x\ge t\end{cases},$$

$$W(x)=1-\int_x^\infty d_yU(x,y)=1-e^{-\omega x},\ x>0.$$

Здесь $\int_0^\infty e^{-sy}d_yU(x,y)=e^{-x\omega(s)}$.

Теорема 10. Пусть выполнено условие (1) и $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$. Тогда предел

$$\lim_{\rho_1\downarrow 1}P\{\theta(\rho)r\le x\}=1-e^{-x},\ x>0$$

существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\omega$.

Теорема 11. Пусть верно условие (1). Если $\theta(\rho)\sim\beta(\rho)$ при $\rho\to 0$ и $t\to\infty$ так, что $t\alpha(\rho)\to\tau$, $0<\tau\le\infty$, то

$$W_\tau(x)=\lim P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=1-\int_0^\tau d_vU_o(x,v),\ x>0,$$

где

$$\int_0^\infty e^{-sv}d_vU_o(x,v)=e^{-xA(s)},\ s\ge 0.$$

В остальных случаях ($\theta(\rho)=o(\beta(\rho))$ и $\beta(\rho)=o(\theta(\rho))$)

$$\lim P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=1,\ x>0.$$

Теорема 12. В условиях Теоремы 11

$$W_\tau(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & \theta(\rho)=o(\omega), \quad \rho_1\downarrow 1,\\ \begin{cases}0 & x<\tau\\ 1 & x\geq\tau\end{cases}, & \theta(\rho)=o(\omega), \quad \rho_1\uparrow 1,\\ 1-\int_0^\tau f(v,x)\,dv, & \theta(\rho)\sim\omega \text{ или } \omega=o(\theta(\rho)), \quad \rho_1\to 1\end{cases}.$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Э. А. Даниеляну и к. ф.-м. н. Р. Н. Читчяну за постановки задач и постоянное внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мартиросян, А. Р. Критические риски в страховых портфелях. – Ереван, Матем. в Высш. Школе, Том 3, 2007, N4, с.10 - 17.
2. Мартиросян А. Р. Представление в виде ряда одной плотности в теории очередей. - Ереван, Ученые записки ЕГУ, 2008, 2, с. 142-145.
3. Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н. Анализ страховых моделей с положительными страховыми выплатами в критической ситуации. – Информационные Технологии и Управление. - Ереван, 2007, N 6, с. 75-99.
4. Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н. Асимптотический анализ отрицательных страховых сумм в критической ситуации. – Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 6, 2007, с 55 - 61.
5. Даниелян Э. А., Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н. – Об одном предельном законе в теории очередей. – Матем. в Высш. Школе, Ереван, Том 3, 2007, N3, с.10 - 17.
6. Мартиросян А. Р., Даниелян И. Э. Апроксимация критических рисков в страховых портфелях. - Ереван, Доклады НАН РА, 2008, N2, с. 110 - 118.

Արտակ Ռաֆիկի Մարտիրոսյան

Ապահովագրական մոդելների բնութագրիչների ասիմպտոտիկ վերլուծություն կրիտիկական իրավիճակներում

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսությունը նվիրված է, կրիտիկական ծանրաբեռնվածության և մեծ ռիսկերի ընդհանրացված պայմանի դեպքում, ռիսկի պրոցեսների հնարավոր սահմանային օրենքների դուրս բերմանը՝ ընդհանուր, զուտ ապահովագրական և կյանքի ցմահ ռենտայի 1 – 3 ապահովագրական պորտֆելներում: Կիրառվել են վերականգնման տեսության, կոմպլեքս անալիզի, կայուն բաշխումների, կանոնավոր փոփոխվող ֆունկցիաների հատկությունները:

Դիցուք $\lozenge=\Delta$ և $\lozenge=\nabla$, որտեղ $\Delta(s)\geq 0$, $\Delta(0)=0$ և $\nabla(s)\geq 1$, $\nabla(0)=1$ — ֆունկցիաները համապատասխանաբար $x^{\gamma}+x=s$ և $x^{\gamma}-x=s$, $1<\gamma\leq 2$, $s\geq 0$ հավասարումների միակ լուծումներն են: Դրանց միջոցով ներկայացվում են սահմանային օրենքները:

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ նոր արդյունքները.

1. Ստացված են $e^{-t\lozenge(s)}$ և $(\lozenge(s))^{-1}$ Լապլաս – Ստիլտեսի ձևափոխությունների (ԼՍՁ) շրջումները:
2. Գտնված են $e^{-t\lozenge(s)}$ և $(\lozenge(s))^{-1}$ ԼՍՁ - երին համապատասխան $f_{\lozenge}(x,t)$ և $f_{\lozenge}^{o}(x)$ խտության ֆունկցիաների կապերը Ջրբաշյան – Բադոյանի հայտնի ֆունկցիաների և կայուն բաշխումների հետ:
   1 – 3 մոդելներում՝
3. Ապացուցված է կրիտիկական ռիսկերի գոյությունը և գտնված են դրանց ԼՍՁ - երը:
4. Որոշված են կրիտիկական ռիսկերի բացահայտ տեսքերը:
5. Բերված է չսնանկացման հավանականության նոր ներկայացում կյանքի ցմահ ռենտաների պայմանագրերով պորտֆել 3 – ում:
6. Ուսումնասիրված են հնարավոր կրիտիկական ռիսկերն ապահովագրական վճարների վերջավոր երկրորդ կարգի մոմենտի գոյության դեպքում՝ 1 – 3 պորտֆելներում: